LINEARNE JEDNAČINE SA PARAMETRIMA

PONOVIMO!!!

Pod linearnom jednačinom ‘’po *x*’’ podrazumijevamo svaku jednačinu sa nepoznatom *x* koja se ekvivalentnim transformacijama svodi na jednačinu oblika:

$$a \cdot x = b$$

gde su a i b dati realni brojevi.
Za svaku linearnu jednačinu važi:

1) ***ax=b, a = 0 i b = 0*** *jednačina ima beskonačno mnogo rješenja* ***(x∊R)***
primjer: **0*x* = 0**, svaki broj zadovoljava jednakost (svaki broj pomnožen sa 0 daje 0)

2) ***ax= b, a = 0 i b ≠ 0,*** *jednačina nema rješenje* ***(x∊Ø)***
primjer: **0*x* = 5** nema rješenje (ne postoji broj koji pomnožen sa 0 daje 5)

3) ***ax = b, a ≠ 0,*** *rješenje jednačine je* $\boldsymbol{x = \frac{b}{a}}$
primjer: 2*x* = 4, rješenje je $x = \frac{4}{2}$ tj. $x = 2$

Iz ova tri slučaja vidimo da od *a* i *b* zavisi da li će jednačina i koliko rješenja imati. Šta se dešava kada *a* nije konkretan broj nego izraz koji sadrži neki parametar? Kako znati koja od navedene tri mogućnosti je zastupljena u zadatku?
U tom slučaju dužni smo RAZMOTRITI SVE TRI mogućnosti U ZAVISNOSTI OD PARAMETRA.
Pokazaćemo na primjerima!

ZADACI

Riješi jednačinu u zavisnosti od parametra *a*.

Vodi računa: *x* je nepoznata veličina u zadacima, parametar *a* se smatra poznatim. Tako članovi koji sadrže *a* ali ne sadrže *x* se prebacuju na desnu stranu jednakosti (poslije znaka =). Na lijevoj strani jednakosti (prije znaka =) treba da budu članovi koji sadrže *x*!

1) $a(a^2 - x) = a - x$

Prvo se oslobađamo zagrade množenjem. Zatim razdvajamo nepoznate članove od poznatih. Sa obje strane jednakosti izvlačimo zajednički djelilac ispred zagrade.

$$a(a^2 - x) = a - x$$
$$a^3 - ax = a - x$$
$$x - ax = a - a^3$$
$$(1 - a)x = a(1 - a^2);$$

Nakon toga, treba obratiti pažnju na činilac uz x, u našem slučaju to je $(1 - a)$.

1) Ako je $\boldsymbol{1 - a = 0}$, što bi značilo da je $\boldsymbol{a = 1}$, jednačina bi imala oblik:

   $(1 - 1)x = 1\,(1 - 1^2)$
   $0x = 0$

   Ovo je neodređena jednačina, koja ima beskonačno rješenja jer svaki broj pomnožen sa 0 daje 0 (x može biti bilo koji realan broj).
   Tada pišemo

   $$\boldsymbol{x \in R} \text{ (R je skup realnih brojeva)}$$

2) Ako $\boldsymbol{1 - a \neq 0}$, što bi značilo da $\boldsymbol{a \neq 1}$, jednačina ima oblik:

   $(1 - a)x = a\,(1 - a^2)$

   Tada jednačinu rješavamo:

   $$x = \frac{a(1-a^2)}{1-a}$$

   $1-a^2=(1 - a)(1 + a)$, *razlika kvadrata*

   Pa je

   $$x = \frac{a(1-a)(1+a)}{1-a}$$

   Poslije skraćivanja razlomka, dobijamo

   $$x = a(1 + a)$$

2)

$$\begin{aligned} a^2(x-1) &= 2ax-4 \\ a^2x-a^2 &= 2ax-4 \\ a^2x-2ax &= a^2-4 \\ a(a-2)x &= (a-2)(a+2). \end{aligned}$$

Za $a=0$ jednadžba nema rješenja jer je $0 \cdot x = -4$ a takav x ne postoji, za $a=2$ jednadžba je neodređena, za $a \neq 0$ i $a \neq 2$ rješenje jednadžbe je $x = \frac{a+2}{a}$.

3)

$$\begin{aligned} a^2(x-1) &= x+a \\ a^2x-a^2 &= x+a \\ a^2x-x &= a+a^2 \\ (a-1)(a+1)x &= a(a+1). \end{aligned}$$

Za $a=1$ jednadžba nema rješenja, za $a=-1$ jednadžba je neodređena, za $a \neq 1$ i $a \neq -1$ rješenje jednadžbe je $x = \frac{a}{a-1}$.

4)

$$\begin{aligned} 9a^2(x+1) &= 4+6ax \\ 9a^2x+9a^2 &= 4+6ax \\ 9a^2x-6ax &= 4-9a^2 \\ 3a(3a-2)x &= (2-3a)(2+3a). \end{aligned}$$

Za $a=0$ jednadžba nema rješenja, za $a=\frac{2}{3}$ jednadžba je neodređena, za $a \neq 0$ i $a \neq \frac{2}{3}$ rješenje jednadžbe je $x = -\frac{3a+2}{3a}$.

5)

$$\begin{aligned} a^2(x-1) &= ax-1 \\ a^2x-a^2 &= ax-1 \\ a^2x-ax &= a^2-1 \\ a(a-1)x &= (a-1)(a+1). \end{aligned}$$

Za $a=0$ jednadžba nema rješenja, za $a=1$ jednadžba je neodređena, za $a \neq 0$ i $a \neq 1$ rješenje jednadžbe je $x = \frac{a+1}{a}$.

6)

$$\begin{aligned} a^2(2x-1) &= -4-4ax \\ 2a^2x-a^2 &= -4-4ax \\ 2a^2x+4ax &- a^2-4 \\ 2a(a+2)x &= (a-2)(a+2). \end{aligned}$$

Za $a=0$ jednadžba nema rješenja, za $a=-2$ jednadžba je neodređena, za $a \neq 0$ i $a \neq -2$ rješenje jednadžbe je $x = \frac{a-2}{2a}$.

Domaći zadatak !!!

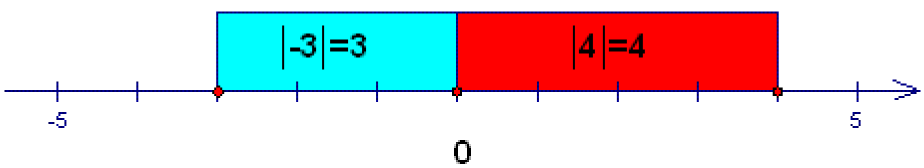
Riješi jednačine u zavisnosti od parametra ***a*.**

- $10 + 3(x-2) = ax + 3$
- $1 - 3a + 5x = ax - 2a + 4x$
- $a^2x + 4 = a(x+4)$

Linearne jednačine sa apsolutnom vrijednošću

Da se podsjetimo…

Apsolutna vrijednost broja je rastojanje tog broja od nule na brojevnoj pravoj. Pošto je rastojanje uvijek pozitivno, i apsolutna vrijednost će uvijek biti pozitivna. Označava se pomoću dvije uspravne crte oko broja: $|x|$.



Kada rješavamo jednačinu sa apsolutnom vrijednošću, izraz u apsolutnoj zagradi može imati jednu od dvije moguće vrijednosti: onu koja ga ostavlja pozitivnim, i onu koja mu je promijenila znak. Zato uvijek postoje dva rješenja jednačine sa apsolutnom vrijednošću.

Ako je

$$|x| = 1$$

x može biti 1 ili -1, jer je

$$|1| = 1 \quad i \quad |-1| = 1$$

Ako je

$$|x| = 13$$

x može biti 13 ili -13, jer je

$$|13| = 13 \quad i \quad |-13| = 13$$

Odavde možemo zaključiti:

$$|x| = \begin{cases} x, & za \quad x > 0 \\ -x, & za \quad x < 0 \end{cases}$$

Naravno $|0| = 0$.

Primjer 1: Provjerimo da li je

$$x = -5$$

rješenje jednačine

$$|2x - 3| = 13$$

Rješenje: Zamjenimo da bi vidjeli da li je tačno:

$$\begin{gathered} |2 \cdot (-5) - 3| = 13 \\ |-10 - 3| = 13 \\ |-13| = 13 \\ 13 = 13 \end{gathered}$$

Jeste, dati broj je rješenje date jednačine.

Primjer 2: Riješimo:

$$|x + 2| = 3$$

Rješenje: Izraz u apsolutnim zagradama ima dvije moguće vrijednosti:

$$\begin{array}{ccc} x + 2 = 3 & ili & x + 2 = -3 \\ x = 3 - 2 & & x = -3 - 2 \\ x = 1 & & x = -5 \end{array}$$

Provjerimo rješenja:

$$\begin{array}{ccc} |1 + 2| = 3 & ili & |-5 + 2| = 3 \\ |3| = 3 & & |-3| = 3 \\ 3 = 3 & & 3 = 3 \end{array}$$

Primjer 3: Riješimo:

$$\left|\frac{1}{6}x-4\right|=2$$

Rješenje: I ovdje imamo dva rješenja:

$$\frac{1}{6}x-4=2 \quad ili \quad \frac{1}{6}x-4=-2$$

$$\frac{1}{6}x=6 \qquad\qquad \frac{1}{6}x=2$$

$$x=36 \qquad\qquad x=12$$

Provjerimo:

$$\left|\frac{1}{6}\cdot 36-4\right|=2 \quad ili \quad \left|\frac{1}{6}\cdot 12-4\right|=2$$

$$|6-4|=2 \qquad\qquad |2-4|=2$$

$$|2|=2 \qquad\qquad |-2|=2$$

$$2=2 \qquad\qquad 2=2$$

Evo još nekoliko zadataka!

1) $|x|=5$

$x=-5 \qquad\qquad x=+5$

2) $|x-1|=2$

$x-1=-2 \qquad\qquad x-1=+2$

$x=1-2 \qquad\qquad x=1+2$

$x=-1 \qquad\qquad x=3$

$$3)\quad |2x-5| = 3x+1$$

za: $2x-5<0$

$$2x<5 \;/:2$$
$$x<\frac{5}{2}$$

$$-(2x-5)=3x+1$$
$$-2x+5=3x+1$$
$$-2x-3x- = 1-5$$
$$-5x=-4 \;/:(-5)$$
$$x=\frac{4}{5}$$

za: $2x-5\geq 0$

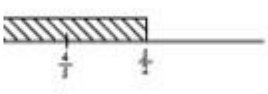
$$2x\geq 5 \;/:2$$
$$x\geq\frac{5}{2}$$

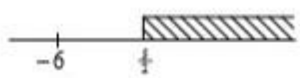
$$+(2x-5)=3x+1$$
$$2x-5=3x+1$$
$$2x-3x- = 1+5$$
$$-x=6 \;/:(-1)$$
$$x=-6$$

Znači, kada je izraz u apsolutnoj zagradi negativan , u jednačini pišemo znak **−** ispred tog izraza i apsolutna zagrada prelazi u ˝običnu˝. U drugom slučaju piše se znak **+**.

Kada smo izračunali rješenja, moramo provjeriti da li zadovoljavaju uslove!!!

$X < \frac{5}{2}$ $\qquad\qquad$ $x \geq \frac{5}{2}$





Na slici vidimo da rješenje x = - 6 ne zadovoljava uslov pa je jedino rješenje jednačine $\quad x = \frac{4}{5}$.

Domaći zadatak !!!

Riješi jednačine:

1)

$$|3x-2| = 1;$$
$$|5x+4| = 7;$$
$$|5-2x| = \frac{3}{4};$$

2)

$$|x+2| = 2x-1;$$
$$|2x-3| = 3x-2;$$